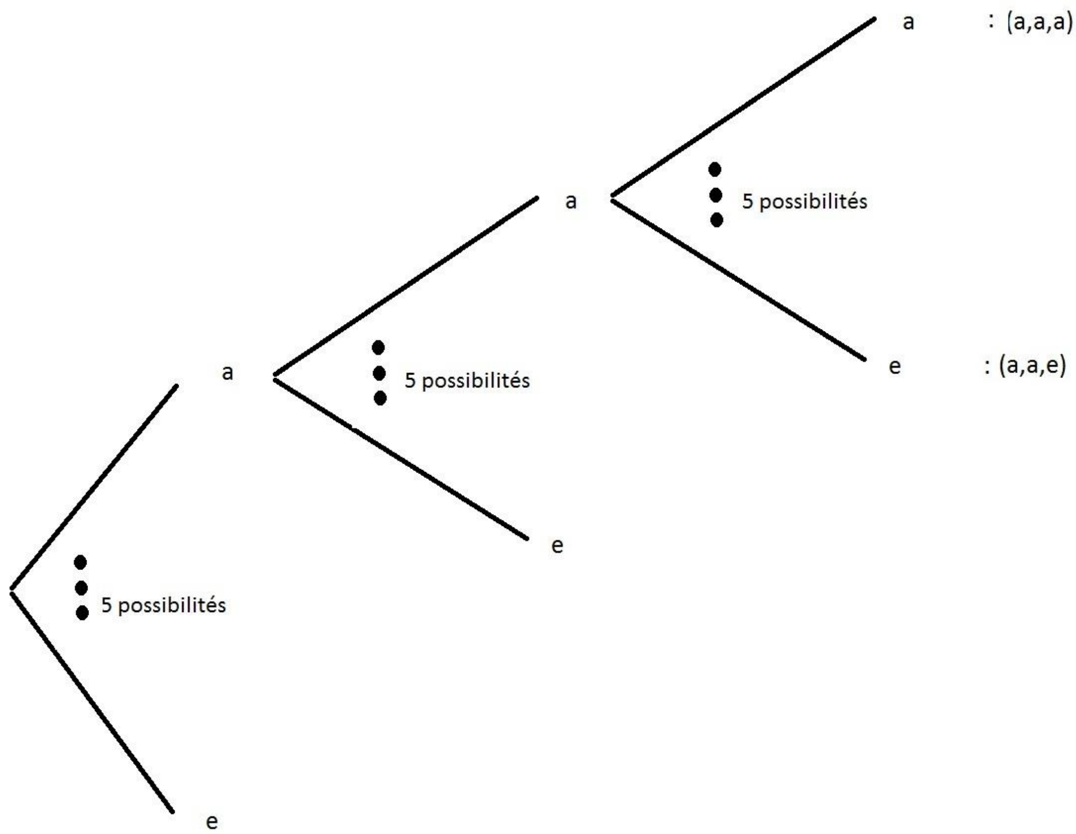
Probabilité

1. Combinatoire - Résumé

Introduction

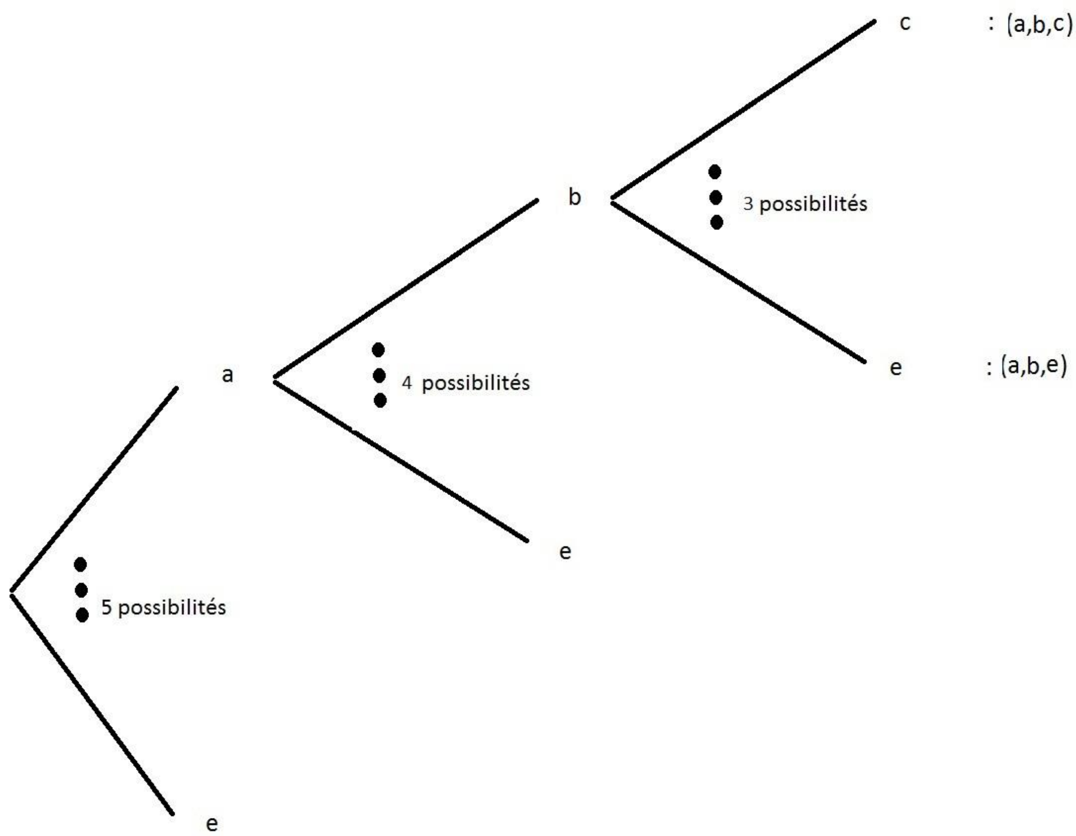
Soient H, a, b, c, d, e tels que $\begin{cases} H = \{a, b, c, d, e\} \\ card(H) = 5 \end{cases}$.

Exemples de 3-listes à partir de l'ensemble H: (a, d, e)
(a, e, d)
(e, c, e).



Le nombre de 3-listes à partir d'un 5-ensemble $= 5.5.5 = 5^3$.

Exemples de 3-arrangements à partie de l’ensemble H : (a, d, e)
(a, e, d).
(e, c, e) est une 3-liste mais n’est pas un arrangement car l’élément e s’y répète.

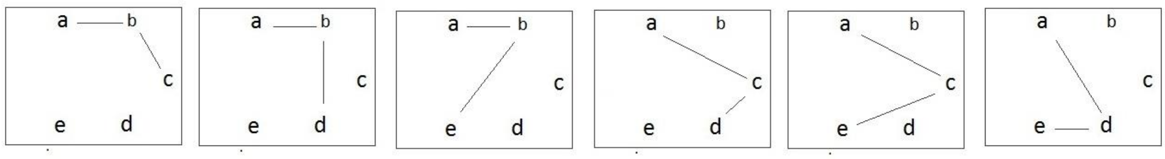


Le nombre de 3-arrangements à partir d’un 5-ensemble

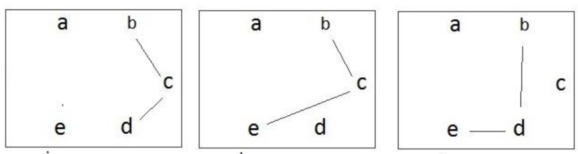
$$= 5.4.3 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!} = A_5^3 = 60.$$

Exemple de 3-combinaison à partir de l'ensemble H : $\{a, d, e\}$.
$\{a, e, d\} = \{a, d, e\}$ car les éléments d'un ensemble ne sont pas ordonnés.

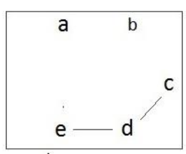
Avec a:



Sans a, avec b:



Sans a et sans b:



Pour chaque 3-combinaison il y a 3! 3-arrangements.
Le nombre de 3-combinaisons à partir d'un 5-ensemble $= C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = 10$.

Résumé

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de p-listes à partir d'un n-ensemble $= \begin{cases} n^p & si\ p \geq 0 \\ 1 & si\ p = 0 \end{cases}$.

Le nombre de p-arrangements à partir d'un n-ensemble $= \begin{cases} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} & si\ p \leq n \\ 0 & si\ p > n \end{cases}$.

Le nombre de p-combinaisons à partir d'un n-ensemble $= \begin{cases} C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} & si\ p \leq n \\ 0 & si\ p > n \end{cases}$.

2. Probabilité - Théorie

EXEMPLE 1 : DÉ NON PIPÉ

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé non pipé à 6 faces.
Ω = l'ensemble des événements élémentaires de cette expérience aléatoire $= \{1,2,3,4,5,6\}$.
On a $\quad p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$
$\qquad p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1.$

THÉORIE :

Si $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
alors définir une probabilité sur Ω, c'est associer à chaque événement élémentaire un nombre $p(e_i)$, appelé probabilité de e_i, tel que pour tout $i : 0 \leq p(e_i) \leq 1$

$$p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1.$$

EXEMPLE 1 : DÉ NON PIPÉ

Soit l'événement C : « Faire un nombre pair plus grand ou égal à 4».
On a : $C = \{4, 6\}$
$\qquad p(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

THÉORIE :

Un événement A est un sous-ensemble de Ω.
$p(A)$ = la probabilité de A = la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A
Si chaque événement élémentaire a la même probabilité, on a une situation d'équiprobabilité et alors $p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

EXEMPLE 2 : DÉ PIPÉ

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé pipé à 6 faces.
Ω = l'ensemble des événements élémentaires de cette expérience aléatoire $= \{1,2,3,4,5,6\}$.
Le dé est pipé de telle manière qu'on a : $\quad p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1}{7}$
$\qquad p(6) = \frac{2}{7}.$
Soit l'événement C : « Faire un nombre pair plus grand ou égal à 4».
On a : $C = \{4, 6\}$
$\qquad p(C) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}.$
Ici, on n'a pas l'équiprobabilité et $(C) \neq \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

EXEMPLE 1 : DÉ NON PIPÉ

$\bar{C}$ = l'événement contraire de l'événement $C = \{1,2,3,5\}$

$$p(\bar{C}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

THEORIE :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

EXEMPLE 1 : DÉ NON PIPÉ

Soit l'événement A : «Faire un nombre pair ».

Soit l'événement B : «Faire un nombre plus grand que 3 ».

L'événement $A \cap B$ est décrit par la phrase «Faire un nombre pair et plus grand que 3 »
c'est-à-dire «Faire un nombre pair plus grand que 3 ».

$A = \{2,4,6\}$
$B = \{4,5,6\}$
$A \cap B = \{4,6\}$
$p(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

L'événement $A \cup B$ est décrit par la phrase «Faire un nombre pair ou un nombre plus grand que 3 »

$A \cup B = \{2,4,6,5\}$
$p(A \cup B) = \frac{1+1+1+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

EXEMPLE 2 : DÉ PIPÉ

$A \cap B = \{4,6\}$
$p(A \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$
$A \cup B = \{2,4,6,5\}$
$p(A \cup B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

THEORIE :

L'événement $A \cap B$ est l'événement constitué des événements élémentaires qui sont dans A et dans B.
L'événement $A \cup B$ est l'événement constitué des événements élémentaires qui sont dans A ou qui sont dans B.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

THEORIE :

L'événement A est certain ssi $p(A) = 1$.
L'événement A est impossible ssi $p(A) = 0$.
Les événements A et B sont incompatibles ssi l'événement $A \cap B$ est impossible.

EXEMPLE 1 : DÉ NON PIPÉ

$A = \{2,4,6\}$
$B = \{4,5,6\}$
$A \cap B = \{4,6\}$
$p(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq 0$

Les événements A et B sont compatibles.

Soit l'événement D : « Faire un nombre impair ».

$D = \{1,3,5\}$
$A \cap D = \{\,\}$
$p(A \cap D) = 0$

Les événements A et D sont incompatibles.

3. Probabilité - Maturitas écrites de 2015 et 2014

Instruction : faire les exercices 1 et 2 avec le professeur, faire les autres seul.

Exercice 1 (2015)

Dans cet exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3} *près.*

On a mis dans un sac 10 jetons blancs numérotés de 0 à 9 et 26 jetons noirs qui comportent chacun une lettre de l'alphabet français. Toutes les lettres de l'alphabet sont présentes sur les jetons noirs. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. On prend <u>simultanément</u> 3 jetons dans le sac.
   Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A : " les trois jetons tirés sont blancs "
   B : " les trois jetons tirés sont noirs "
   C : " les trois jetons tirés sont de la même couleur "
   D : " les trois jetons tirés sont des lettres ".

2. On tire <u>successivement avec remise</u> 3 jetons dans le sac.
   On obtient une suite ordonnée de 3 caractères.
   Déterminer la probabilité des événements suivants :
   E : « la suite obtenue contient 3 caractères différents »
   F : « la suite obtenue contient seulement des chiffres »
   G : « la suite obtenue est un nombre de 3 chiffres » (attention : 012 = 12 est un nombre de 2 chiffres).

3. On tire <u>successivement sans remise</u> 3 jetons dans le sac et on obtient une suite ordonnée de 3 caractères.
   Déterminer la probabilité de l'événement suivant :

H : « la suite obtenue ne contient pas de lettre ».

Solution

$p(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{36}^3} = \frac{2}{119} \approx 0{,}017 \; arrondi \text{ à } 10^{-3} \; près$

$p(B) = \frac{C_{26}^3}{C_{36}^3} = \frac{130}{357} \approx 0{,}364 \text{ à } 10^{-3} \; près$

$p(C) = p(A) + p(B) = \frac{8}{21} \approx 0{,}381 \text{ à } 10^{-3} \; près$

$p(D) = p(B)$

$p(E) = \frac{A_{36}^3}{36^3} = \frac{595}{648} \approx 0{,}918 \text{ à } 10^{-3} \; près$

$p(F) = \frac{10^3}{36^3} = \frac{125}{5832} \approx 0{,}021 \text{ à } 10^{-3} \; près$

$p(G) = \frac{A_9^1 \times 10^2}{36^3} = \frac{25}{1296} \approx 0{,}019 \text{ à } 10^{-3} \; près$

$p(H) = \frac{A_{10}^3}{A_{36}^3} = \frac{2}{119} \approx 0{,}017 \text{ à } 10^{-3} \; près$

Exercice 2 (2015)

On a demandé à 360 personnes quelle était leur activité préférée entre la lecture, le cinéma et le sport.

- Il y avait 60% d´hommes.
- 25% des hommes préfère la lecture.
- Il y a autant d'hommes qui préfèrent le cinéma que le sport.
- Un tiers des femmes préfère la lecture et la moitié préfère le cinéma.

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (aucune justification n'est demandée).

	Hommes	Femmes	Total
Cinéma			
Sport			
Lecture			
Total			360

Dans la suite de l´exercice les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

On interroge une de ces personnes au hasard.
On note :
l'événement « La personne interrogée préfère la Lecture » par L,
l'événement « La personne interrogée préfère le Cinéma » par C,
l'événement « La personne interrogée est un Homme » par H.

2) Calculer les probabilités $p(H), p(C)$.
3) Exprimer par une phrase l'événement $H \cap L$.
Calculer la probabilité $p(H \cap L)$.
4) Exprimer par une phrase l'événement $H \cup L$.
Calculer la probabilité $p(H \cup L)$.
5) On choisit n personnes au hasard.
Ce choix est assimilé à n tirages successifs indépendants avec remise.
On note l'événement «Toutes les personnes interrogées sont des hommes» par M.
Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité de M soit strictement inférieure à $\frac{1}{20}$.

Solution

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (aucune justification n'est demandée).

	Hommes	Femmes	Total
Cinéma	81	72	153
Sport	81	24	105
Lecture	54	48	102
Total	216	144	360

2) $p(H) = \frac{216}{360} = \frac{3}{5}, p(C) = \frac{153}{360} = \frac{17}{40}$

3) $H \cap L :$ « La personne interrogée est un Homme qui préfère la Lecture »

$$p(H \cap L) = \frac{54}{360} = \frac{3}{20}$$

4) $H \cup L :$ « La personne interrogée est soit un Homme soit une personne qui préfère la Lecture »

$$p(H \cup L) = \frac{216 + 102 - 54}{360} = \frac{11}{15}$$

5) $\frac{216^n}{360^n} < \frac{1}{20} \Leftrightarrow n \geq 6$ car $n \in \mathbb{N}$

La valeur minimale de n est 6.

Exercice 3 (2015)

O*n donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.*

Partie A.

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. On tire trois boules blanches.
2. On tire deux boules blanches et une boule rouge.
3. On tire au moins une boule rouge.

Partie B.

Un sac contient 6 jetons avec les lettres F, R, A, N, C, E. Les jetons sont indiscernables au toucher.
On tire successivement 4 jetons sans les remettre dans le sac. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. On obtient le mot CAEN (c'est-à-dire que l'on tire les lettres C,A,E et N dans cet ordre).
2. On tire les lettres du mot CAEN.
3. On tire d'abord les deux voyelles puis deux consonnes.

Solution

Partie A

1. $\frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$
2. $\frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$
3. $1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{6}$

Partie B

1. $\frac{1}{A_6^4} = \frac{1}{360}$
2. $\frac{A_4^4}{A_6^4} = \frac{1}{15}$
3. $\frac{A_2^2 A_4^2}{A_6^4} = \frac{1}{15}$

Exercice 4 (2015)

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans; on dénombre d´autre part 6 filles âgées de 18 ans et une seule a 16 ans.

1) Reproduire et compléter le tableau suivant:

	Garçons	Filles	Totaux
16 ans			
17 ans			
18 ans			
Totaux			36

2) Un élève choisi au hasard est interrogé.

   Calculer la probabilité des événements suivants:

   A: « l´élève interrogé a 16 ans »

   B: « l´élève interrogé est un garçon de 18 ans »

   C: « l´élève interrogé est une fille qui n'a pas 16 ans »

   D: « l´élève interrogé est une fille de 17 ans ou un garçon de 17 ans ».

3) On choisit au hasard 5 élèves. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 2 filles et 3 garçons.

4) On choisit n élèves au hasard.

   Ce choix est assimilé à n tirages successifs indépendants avec remise.

   On note l'événement «Tous les élèves choisis sont des filles» par F. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité $p(F) < \frac{1}{10}$.

Solution

1)

	Garçons	Filles	Totaux
16 ans	1	1	2
17 ans	18	7	25
18 ans	3	6	9
Totaux	22	14	36

2) $p(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$p(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$p(C) = \frac{7+6}{36} = \frac{13}{36}$

$p(D) = \frac{25}{36}$

3) $p = \frac{C_{14}^2 C_{22}^3}{C_{36}^5} = \frac{455}{1224}$

4) $\frac{14^n}{36^n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow n \geq 3$ car $n \in \mathbb{N}$

La valeur minimale de n est égale à 3.

Exercice 5 (2014)

Une urne contient 8 jetons : 3 jetons noirs et carrés, 3 jetons noirs et ronds, 1 jeton vert et carré, 1 jeton vert et rond. Les jetons sont indiscernables au toucher.

On donnera chaque résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On tire deux jetons *simultanément*.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Obtenir deux jetons de la même couleur. »
B : « Obtenir deux jetons de la même forme. »
C : « Obtenir deux jetons de la même couleur ET de la même forme. »

2°) En déduire que la probabilité de l'événement D : « Obtenir deux jetons de la même couleur OU de la même forme. » est $\frac{11}{14}$.

Partie B
On tire un jeton, on note sa couleur et sa forme et on le remet dans l'urne, puis on tire un deuxième.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants :
E : « Obtenir deux jetons de la même couleur. »
F : « Obtenir deux jetons de la même forme. »
G : « Obtenir deux jetons de la même couleur ET de la même forme. »

2°) En déduire que la probabilité de l'événement H : « Obtenir deux jetons de la même couleur OU de la même forme. » est $\frac{13}{16}$.

Solution

1) $p(A) = \frac{C_6^2+C_2^2}{C_8^2} = \frac{4}{7}$

$p(B) = \frac{C_4^2 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{3}{7}$

$p(C) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{14}$

2) $p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(C) = \frac{11}{14}$

3) $p(E) = \frac{6^2+2^2}{8^2} = \frac{5}{8}$

4) $p(F) = \frac{4^2+4^2}{8^2} = \frac{1}{2}$

5) $p(G) = \frac{3^2+3^2+1^2+1^2}{8^2} = \frac{5}{16}$

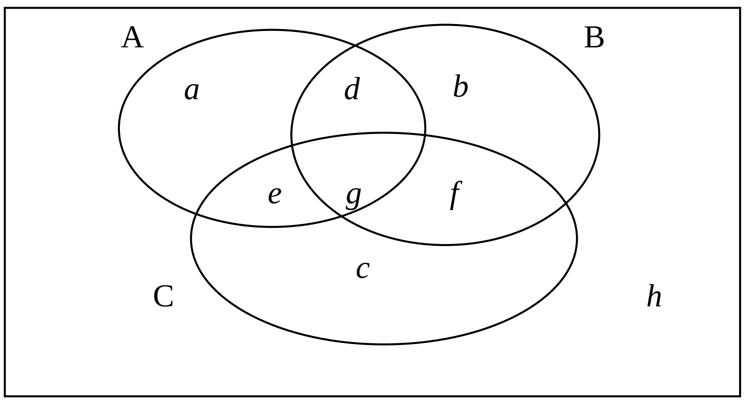
6) $p(H) = p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = p(E) + p(F) - p(G) = \frac{13}{16}$

Exercice 6 (2014)

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une agence de voyage fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays : l'Australie (A) , la Belgique (B) et le Canada (C). On constate que parmi les 100 personnes interrogées, 42% connaissent A, 55% connaissent B, 34% connaissent C, 18% connaissent A et B, 10% connaissent A et C, 15% connaissent B et C, 8% connaissent les trois pays.

1°) En recopiant le diagramme de Venn ci-dessous préciser les valeurs *a, b, c, d, e, f, g* et *h* :



2°) Un voyage est prévu pour l'une des personnes ayant répondu au sondage. On tire au hasard le gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

a) ne connaissant aucun de ces trois pays ?
b) connaissant au moins l'un de ces trois pays ?
c) connaissant exactement deux des trois pays ?
d) connaissant le pays A ou le pays B ?
e) connaissant A, mais ne connaissant ni B, ni C ?

3°) Trois voyages sont prévus pour trois personnes ayant répondu au sondage. On tire au hasard simultanément les trois gagnants. Quelle est la probabilité pour que au moins un gagnant connaisse le pays A ?

Solution

1) $a = 22, b = 30, c = 17, d = 10, e = 2, f = 7, g = 8, h = 4$

2)

a) $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

b) $1 - \frac{4}{100} = \frac{24}{25}$

c) $\frac{2+10+7}{100} = \frac{19}{100}$

d) $\frac{79}{100}$

e) $\frac{22}{100} = \frac{11}{50}$

3) $\frac{C_{42}^{1}C_{58}^{2}+C_{42}^{2}C_{58}^{1}+C_{42}^{3}}{C_{100}^{3}} = \frac{C_{100}^{3}-C_{58}^{3}}{C_{100}^{3}} = \frac{4673}{5775}$

Exercice 7 (2014)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie A
Un courtier en assurance propose 3 contrats : Responsabilité civile, **V**éhicule, **H**abitation.
Ses 1000 clients ont tous souscrit le contrat Responsabilité civile. Parmi ceux-là, 800 ont souscrit le contrat Véhicule, 700 ont souscrit le contrat Habitation et 650 ont soucrit à la fois le contrat Véhicule et le contrat Habitation.
Le courtier tire le dossier d'un client au hasard.

Soit **V**: "Le client a souscrit le contrat Véhicule."
Soit **H**: "Le client a souscrit le contrat Habitation."
Soit **R**: "Le client a souscrit uniquement le contrat Responsabilité civile."

1°) Déterminer la probabilité de l'événement V et puis celle de l'événement H, notées respectivement $p(\mathrm{V})$ et $p(H)$.
2°) Exprimer par une phrase chacun des évènements $\mathrm{V} \cap \mathrm{H}$ et $\mathrm{V} \cup \mathrm{H}$.
3°) Déterminer la probabilité de chacun des évènements $\mathrm{V} \cap \mathrm{H}$ et $\mathrm{V} \cup \mathrm{H}$.
4°) Déterminer la probabilité de l'événement R, notée $p(\mathrm{R})$.

Partie B
Une urne contient 100 boules indiscernables au toucher. 20 portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles : 10% sont rouges et 90% sont vertes.

1°) On tire une boule au hasard.
a) Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge?
b) La boule tirée est rouge. Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.
c) Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas rouge portant le numéro 1.

2°) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Solution

Partie A

1) $p(V) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$

$p(H) = \frac{700}{1000} = \frac{7}{10}$

2) $V \cap H$: « Le dossier tiré est le dossier d'un client ayant souscrit le contrat Véhicule et le contrat Habitation »

$V \cup H$: « Le dossier tiré est le dossier d'un client ayant souscrit le contrat Véhicule ou le contrat Habitation »

3) $p(V \cap H) = \frac{650}{1000} = \frac{13}{20}$

$p(V \cup H) = p(V) + p(H) - p(V \cap H) = \frac{17}{20}$

4) $p(R) = 1 - p(V \cup H) = \frac{3}{20}$

Partie B

1)

a) $\frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

b) $\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$

c) 0

2)

a) $p = 1 - \frac{80^n}{100^n} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$

b) $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq 21$ car $n \in \mathbb{N}$

A partir de $n = 21$, la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 8 (2014)

Dans un jeu de 32 cartes, on distingue 4 couleurs : pique, coeur, carreau, trèfle, et dans chaque couleur,
8 valeurs : as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept.

On donnera chaque résultat sous forme d'une valeur approchée à 10^{-3} *près.*

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On tire au hasard 5 cartes *simultanément* dans un jeu de 32 cartes.
On obtient ainsi une main de 5 cartes.

1°) Quel est le nombre total de mains possibles?
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
a) A : “ Parmi les 5 cartes tirées il y a le roi de cœur. ”
b) B : “ Parmi les 5 cartes tirées il n'y a aucun pique. ”
Question supplémentaire : Calculer la probabilité des événements suivants :
Full House : “ Les 5 cartes tirées forment un full house. ”
Deux Paires : “ Les 5 cartes tirées forment deux paires. ”

Partie B

On dispose les cartes en quatre paquets contenant chacun les huit cartes d'une même couleur et on tire au hasard une carte de chaque paquet (exemple de tirage: as de pique, sept de coeur, roi de carreau, sept de trèfle).

1°) Combien y a t-il de tirages possibles?
2°) Calculer la probabilité des événements suivants:
a) C : “ Les quatre cartes sont de même valeur. ”
b) D : “ Il y a au moins une dame. ”
c) E : “ Il y a exactement deux rois et exactement deux valets. ”

Solution

PARTIE A

1) $C_{32}^5 = 201376$

2)

a) $p(A) = \frac{C_1^1 C_{31}^4}{C_{32}^5} = \frac{5}{32} \approx 0{,}156\ arrondi$ à $10^{-3}\ près$

b) $p(B) = \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5} = \frac{759}{3596} \approx 0{,}211$ à $10^{-3}\ près$

Question supplémentaire :

$$p(\text{Full House }) = \frac{C_8^1 C_4^3 C_7^1 C_4^2}{C_{32}^5} = \frac{C_8^2 C_2^1 C_4^3 C_4^2}{C_{32}^5}$$

$$p(\text{Deux Paires }) = \frac{C_8^2 C_4^2 C_4^2 C_6^1 C_4^1}{C_{32}^5} = \frac{C_8^3 C_3^1 C_4^2 C_4^2 C_4^1}{C_{32}^5} = \frac{C_8^2 C_4^2 C_4^2 C_{24}^1}{C_{32}^5}$$

PARTIE B

1) $(C_8^1)^4 = 8^4 = 4096$

2)

a) $p(C) = \frac{C_8^1}{8^4} = \frac{1}{512} \approx 0{,}002$ à $10^{-3}\ près$

b) $p(D) = \frac{8^4 - (C_7^1)^4}{8^4} = \frac{1695}{4096} \approx 0{,}414$ à $10^{-3}\ près$

c) $p(E) = \frac{C_4^2}{8^4} = \frac{3}{2048} \approx 0{,}001$ à $10^{-3}\ près$

4. Probabilité – Une maturita écrite d'un autre type

Exercice 9

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fraction irréductible.

On considère les événements suivants :
A : « les trois boules sont rouges »;
B : « les trois boules sont de la même couleur »;
C : « les trois boules sont chacune d´une couleur différente ».
Calculer la probabilité des événements A, B et C.

2) Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par *n* boules rouges où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc *n+5* boules, c'est à dire, *n* rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne.

On considère les événements suivants :
D : « tirer deux boules rouges »;
E : « tirer deux boules de la même couleur ».

a) Montrer que la probabilité de *D* est : $p(D)=\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b) Calculer la probabilité $p(E)$ en fonction de *n*.

c) Déterminer pour quelles valeurs de *n* on a $p(E)\geq\dfrac{1}{2}$.

Solution

1) $p(A)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$

$p(B)=\dfrac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{11}{120}$

$p(C)=\dfrac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{4}$

2)

a) $p(D)=\frac{C_n^2}{C_{n+5}^2}=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

b) $p(E)=\frac{C_n^2+C_3^2+C_2^2}{C_{n+5}^2}=\frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$

c) $p(E)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow n^2-11n-4\geq 0\Leftrightarrow n\geq 12$ car $\begin{cases}n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2\end{cases}$

5. Espérance d'une variable aléatoire

Exercice 10

Une roulette a 37 numéros, du 0 au 36. Le 0 est vert, et il y a 18 numéros rouges et 18 numéros noirs.

1) Quelle est la probabilité d'avoir un numéro rouge ?
2) Si on parie sur le rouge et que l'on gagne, on double sa mise mais que si l'on perd, on perd sa mise.
   Soit la variable aléatoire X qui correspond au gain d'un joueur qui parie un euro sur le rouge.
   Calculer l'espérance de X.

Solution

1) $\frac{18}{37}$
2) La loi de probabilité de X :

Valeur a_i	-1	$+1$
$p(X = a_i)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$E(X) = -1 \times \frac{19}{37} + 1 \times \frac{18}{37} = \frac{-1}{37}$ €